Uma Introdução Geométrica aos Grupos de Lie

André Nascimento Alcântara Pereira
Gabriel Henrique Lopes Gomes Alves Nunes

Universidade Federal de Minas Gerais

Cássio Anderson Feitosa

Universidade Federal da Paraíba

Cléber Barreto dos Santos

Universidade Federal do Paraná

Diego Henrique Faustino Carriel

UNESP

Orientador: Romero Solha

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

III Simpósio Nacional do PICME
Fevereiro de 2016

Resumo

Neste trabalho, buscamos entender basicamente os grupos e as álgebras de Lie sob o ponto de vista geométrico, e principalmente enxergar os grupos de matrizes como subvariedades de $\mathbb{R}^{n^2}$. Para tanto, começamos tratando os espaços vetoriais reais para enxergar a suavidade de funções $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sempre através da suavidade de funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Demos uma definição adaptada de vetores tangentes, através de curvas entre espaços reais. Construímos o espaço tangente à variedade em um ponto a partir dos vetores tangentes, desviando da definição comum feita através de quocientes. As definições foram escolhidas de forma a permitir o estudo das subvariedades de $\mathbb{R}^n$ de uma forma a estender os mesmos conceitos para variedades mais gerais sem variação significativa das definições. Feito isso, vemos o que são os grupos de Lie sob um olhar geométrico, olhando as operações relacionadas aos seus elementos, e definindo sua álgebra de Lie, dando atenção à sua relação com os operadores adjuntos. Buscamos o tempo todo colocar justamente os exemplos dos grupos de matrizes no trabalho, para que seja possível uma melhor visualização dos conceitos envolvidos, fornecendo uma intuição geométrica aos grupos de matrizes, que são geralmente tratados de forma algébrica.

Conteúdo

1 Geometria Diferencial

1.1 Aplicações Suaves

Funções Reais

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição: f é *diferenciável* em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ se existe o limite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \bigg|_{t_0} := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Definição: Se f é é diferenciável $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$, então definimos sua *derivada*:

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t_0 &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \bigg|_{t_0} \end{aligned}$$

Definição: f é dita *suave* se:

- f tem derivadas de todas as ordens.
- f e suas derivadas derivadas de todas as ordens são funções continuas.

Curvas Regulares

Definição: Uma *curva regular* em $\mathbb{R}^m$ é um mapa $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \gamma(t) \bigg|_{t_0} \neq 0 \qquad\qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

Definição: γ é dita *suave* se cada componente sua for suave, isto é:

$$x_j \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é suave} \qquad\qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$$

Definição: Uma *curva regular* em $\mathcal{M}$ é um mapa $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ tal que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi \circ \gamma(t) \bigg|_{t_0} \neq 0 \qquad \text{com } \varphi \text{ uma carta em torno de } \gamma(t_0)$$
$$\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

Definição: γ é dita *suave* se

$$x_j \circ \varphi \circ \gamma(t) \text{ é suave} \qquad \text{com } \varphi \text{ uma carta em torno de } \gamma(t_0)$$
$$\forall\, t_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$$

Funções Suaves

Definição: Dizemos que uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é *suave* se:

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é suave} \qquad\qquad \forall\, \gamma \text{ suave}$$

Denotamos por $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ o conjunto de todas essas funções. Nota-se que esse conjunto tem uma estrutura natural de anel comutativo com identidade pela soma e multiplicação usual de funções.

Definição: Dizemos que uma função $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é *suave* se:

$$\begin{aligned} x_j \circ \varphi \circ F \circ \gamma(t) \text{ é suave} \qquad & \text{com } \varphi \text{ uma carta em torno de } \gamma(t_0) \\ & \forall\, t_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, \gamma \text{ suave},\ \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

1.2 Espaço Tangente

Dada uma curva regular suave γ, tal que $\gamma(t_0) = p \in \mathcal{M}$
Definição: O vetor tangente a γ em p é a função:

$$\begin{aligned} v : \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f \mapsto v(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} \end{aligned}$$

Definição: O *espaço tangente a p*, denotado $\mathbf{T_p}\mathcal{M}$, é o conjunto de vetores tangentes a alguma curva em $p \in \mathcal{M}$

Propriedades

Dado $v \in \mathbf{T_p}\mathcal{M}$, $\forall\, f,\ g \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vale:
Linearidade:

$$\begin{aligned} v(f + \lambda\, g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f + \lambda\, g) \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f \circ \gamma(t)\big) + \lambda\,\big(g \circ \gamma(t)\big) \,\Big|_{t_0} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} + \lambda\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} = \\ &= v(f) + \lambda\, v(g) \end{aligned}$$

Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} v(f \cdot g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \cdot g) \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f \circ \gamma(t)\big) \cdot \big(g \circ \gamma(t)\big) \,\Big|_{t_0} = \\ &= \big(f \circ \gamma(t_0)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) \,\Big|_{t_0} \cdot \big(g \circ \gamma(t_0)\big) = \\ &= f(p) \cdot v(g) + v(f) \cdot g(p) \end{aligned}$$

Base

Teorema: Os vetores:

$$\mathbf{X_j} : \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \, f \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(p)}$$

com $j \in \{1, \ldots, n\}$ formam base de $\mathbf{T_p}\mathcal{M}$

Prova:
Todo vetor pode ser escrito como combinação linear dos X_i's:

$$v(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, f \circ \gamma(t) \Big|_{t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma(t) \Big|_{t_0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi \circ \gamma(t_0)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, x_i \circ \varphi \circ \gamma(t) \Big|_0$$

Definindo:

$$a_j := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, x_j \circ \varphi \circ \gamma(t) \Big|_{t_0} = v(x_j \circ \varphi) \in \mathbb{R}$$

Como $\gamma(t_0) = p$, temos $\forall \, f \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \Big|_{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot X_i(f) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot X_i \right)(f)$$
$$\implies v = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot X_i$$

E eles são linearmente independentes, pois se:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot X_i = 0 \in \mathbf{T_p}\mathcal{M}$$
$$\implies 0(f) = 0 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(p)} \qquad \forall \, f \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

Seja $f = x_j \circ \varphi$

$$0 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} x_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(p)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \delta_i^j = a_j \qquad \forall \, j \in \{1, \ldots m\}$$

Campos de Vetores

Definição: Um *campo de vetores* é um mapa com domínio em $\mathcal{M}$:

$$X : p \mapsto X|_p \in \mathbf{T_p}\mathcal{M}$$

Definição: Denota-se o conjunto dos campos de vetores $\mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$

1.3 Derivada e Extensões

Dada $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suave
Definição: A derivada de F em p é:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_p F : \mathbf{T_p}\mathcal{M} &\to \mathbf{T_{F(p)}}\mathcal{N} \\
v &\mapsto w \text{ tal que:} \\
&\quad w(g) = v(g \circ F) \quad \forall\, g \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Regra da Cadeia

Dadas $F : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$, $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suaves
Teorema:

$$
\mathrm{d}_p(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(p)}G \circ \mathrm{d}_p F
$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_p F : u &\mapsto v \quad \text{com } v(f) = u(f \circ F) & \forall\, f \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \\
\mathrm{d}_{F(p)} G : v &\mapsto w \quad \text{com } w(g) = v(g \circ G) & \forall\, g \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R}) \\
\mathrm{d}_{F(p)} G \circ \mathrm{d}_p F : u &\mapsto w \quad \text{com } w(g) = v(g \circ G) = u(g \circ G \circ F) & \forall\, g \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Como:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}_p(G \circ F) : u \mapsto w \text{ com } w(g) = u(g \circ G \circ F) && \forall\, n \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R}) \\
&\implies \mathrm{d}_p(G \circ F)(u) = \mathrm{d}_{F(p)}G \circ \mathrm{d}_p F(u) && \forall\, u \in \mathbf{T_p}K \\
&\implies \mathrm{d}_p(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(p)}G \circ \mathrm{d}_p F
\end{aligned}
$$

Extensões

Dada $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suave
Definição: O *pushfoward* por F é o mapa com domínio em $\mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}F : X \mapsto Y \text{ tal que} \\
&\qquad Y(p) = \mathrm{d}_p F(X|_p) \in \mathbf{T_{F(p)}}\mathcal{N} \qquad \forall\, p \in \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

Como $F(p)$ não é necessariamente p, mesmo se $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, não é verdade que a imagem é um campo de vetores em $\mathcal{N}$.

Dada $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ suave, com inversa suave
Definição: A ação adjunta por F é:

$$
\begin{aligned}
Ad_F : \mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R}) &\to \mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \\
X &\mapsto Y \text{ tal que} \\
&\quad Y|_p = \mathrm{d}_{F^{-1}(p)} F(X|_{F^{-1}(p)}) \qquad \forall\, p \in \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

Algumas Propriedades

Proposição: $\mathrm{d}_p \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{T_p}\mathcal{M}}$
Prova:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_p \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} : \mathbf{T_p}\mathcal{M} &\to \mathbf{T}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}(\mathbf{p})}\mathcal{M} = \mathbf{T_p}\mathcal{M} \\
v &\mapsto w \text{ tal que:} \\
& \quad w(f) = v(f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}) = v(f) \qquad \forall\, f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies & \mathrm{d}_p \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}(v) = v \qquad\qquad \forall\, v \in \mathbf{T_p}\mathcal{M} \\
\implies & \mathrm{d}_p \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{T_p}\mathcal{M}}
\end{aligned}
$$

Proposição: Dada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ uma curva regular suave, o vetor tangente a γ em $\gamma(t_0)$ é dado por:

$$
v = \mathrm{d}_{t_0}\gamma \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t_0} \right)
$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{t_0}\gamma : \mathbf{T_{t_0}}\mathbb{R} &\to \mathbf{T}_{\gamma(\mathbf{t_0})}\mathcal{M} \\
v &\mapsto w \text{ tal que} \\
& \quad w(f) = v(f \circ \gamma) \qquad \forall\, f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies & \mathrm{d}_{t_0}\gamma \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t_0} \right)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f \circ \gamma(t) \bigg|_{t_0} = v(f) \qquad \forall\, f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \\
\implies & v = \mathrm{d}_{t_0}\gamma \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t_0} \right)
\end{aligned}
$$

1.4 Curvas Integrais e Fluxo

Curvas Integrais

Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$
Definição: A *curva integral* de X passando por $p \in \mathcal{M}$ é:

$$
\begin{aligned}
\gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\hookrightarrow \mathcal{M} \text{ tal que} \\
\gamma(0) &= p \\
X|_{\gamma(t_0)}(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f \circ \gamma(t) \bigg|_{t_0} \qquad \forall\, t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

com ϵ maximal. Isto é, a curva tal que o seu vetor tangente em cada ponto é dado pelo campo de vetores, passando pelo ponto em $t = 0$

Definição: Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ é dito completo se, $\forall\, p \in \mathcal{M}$, a curva integral de X passando por p tem domínio em todo o $\mathbb{R}$.

Fluxo

Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M};\mathbb{R})$
Definição: O fluxo do campo X é o mapa:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to & \mathcal{M} \\ (t,p) \mapsto & \gamma_p(t) \\ & \gamma_p \text{ a curva integral de } X \text{ passando por } p \end{aligned}$$

Definição: Outra notação para o fluxo do campo X é

$$\exp(tX)(p) := \phi(t,p)$$

Definição: A exponencial de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M};\mathbb{R})$ é:

$$\begin{aligned} \exp(X) : \mathcal{M} \to & \mathcal{M} \\ p \mapsto & \exp(1 \cdot X)(p) \end{aligned}$$

A exponencial é um mapa suave, com inversa $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$. Portanto, $\exp(X) \in \mathbf{Diff}(\mathcal{M})$

1.5 Teorema do Mergulho de Whitney

Definição: Uma **subvariedade** suave de dimensão m de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ tal que para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ existe um aberto $p \in V \subset \mathbb{R}^n$, onde $V \cap \mathcal{M}$ é um gráfico de um mapa suave de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^{n-m}$. Isto é, $V \cap \mathcal{M} = \{(x,\Psi(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in \mathbb{R}^n\}$ e $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ é um mapa suave onde $\widetilde{\Psi} : \mathbb{R}^m \ni x \longmapsto (x,\Psi(x)) \in \mathbb{R}^n$, e $\widetilde{\Psi}(\mathbb{R}^m) = V \cap \mathcal{M}$.

Teorema do Mergulho de Whitney: Seja $\mathcal{M}$ uma variedade (sob certas condições). Então existe m de tal forma que $\mathcal{M}$ pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^n$

Exemplo: Seja o polinômio $\text{pol} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $\text{pol}(x,y) = ax + b - y$ com $a,b \in \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \text{pol}(x,y) = 0\}$. Se condiseramos $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(t) = at + b$, então Ψ mostra que $\mathcal{M}$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: Se consideramos o polinômio $\text{pol} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, por $\text{pol}(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, e o conjunto $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \text{pol}(x,y) = 0\}$, temos que as funções $\Psi_i \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ dadas por $\Psi_1(t) = \sqrt{1-t^2}$ e $\Psi_2(t) = -\sqrt{1-t^2}$ dão uma estrutura à $\mathcal{M}$ de uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: Analogamente, podemos considerar o polinômio $\text{pol}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ para induzir uma estrutura de variedade na esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exemplo: Considere os polinômios $\text{pol}_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $\text{pol}_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dados por

$$\text{pol}_1(x,y,z,w) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{pol}_2(x,y,z,w) = z^2 + w^2 - 1.$$

Podemos então mostrar que

$$\mathcal{M} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \text{pol}_1(x,y,z,w) = \text{pol}_2(x,y,z,w) = 0\}$$

é uma subvariedade de dimensão 2 de $\mathbb{R}^4$, e esta variedade nada mais é do que o toro, que também pode ser visto em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo: Seja $U_n \doteq \{A \in M(n;\mathbb{C}) | A\overline{A}^t = Id\}$ o grupo das matrizes unitárias. Por exemplo, temos que $U_1 = \{A \in M(n;\mathbb{C}) | A\overline{A}^t = Id\}$, podemos representar qualquer elemento pela forma $A = [a+bi]$, e logo teremos que $A\overline{A} = a^2+b^2 = 1$, o que nos permite identificar U_1 com S^1.

Observação: Seja $x \in \mathbb{R}^m$ e $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ um mapa suave. Então temos que $d_x\widetilde{\Psi} : T_x\mathbb{R}^m \to T_{\widetilde{\Psi}(x)}\mathbb{R}^n$ é injetivo. Podemos observar que $pr_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $pr_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é a inversa (sobre a imagem) de $\widetilde{\Psi}$.

1.6 Mais Geometria Diferencial

Definição: Dizemos que $(V \cap \mathcal{M}, \Psi)$ é uma carta local em torno de p.

Definição: Dizemos também que $x_j \circ \Psi$ é uma função coordenada.

Observação: Seja $p \in V_1 \cap V_2 \subset \mathbb{R}^n$, com $(V_1 \cap \mathcal{M}, \Psi_1)$ e $(V_2 \cap \mathcal{M}, \Psi_2)$ cartas locais. Temos que a função

$$\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}\big|_{\Psi_1(V_1 \cap V_2)}$$

é suave e além disso é um difeomorfismo. Temos que a sua inversa também é suave e é dada por $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}\big|_{\Psi_2(V_1 \cap V_2)}$.

2 Geometria dos Grupos de Lie

2.1 Grupos de Lie

Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto não vazio, e uma operação binária $* : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Dizemos que $(\mathcal{G}, *)$ é um *Grupo* se são satisfeitas as seguintes condições:

- Associatividade:

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \qquad\qquad \forall\, g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$$

- Identidade:

$$\begin{aligned} &\exists\, e \in \mathcal{G} \text{ tal que} \\ &e * g = g * e = g \qquad\qquad \forall\, g \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

- Inversa:

$$\begin{aligned} &\exists\, g^{-1} \in \mathcal{G} \text{ tal que} \\ &g^{-1} * g = g * g^{-1} = e \qquad\qquad \forall\, g \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Definição: Um grupo $(\mathcal{G}, \circ)$ é um *grupo de Lie* (suave) se também é uma subvariedade de $\mathbf{Diff}(\mathcal{M})$, e a aplicação $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é uma função suave.
Nesse caso, denotamos $\mathfrak{g} := \mathbf{T_e}\mathcal{G}$.

Definição: A multiplicação à esquerda por um elemento $g \in \mathcal{G}$ é o mapa:

$$\begin{aligned} L_g : \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \\ h &\mapsto g \circ h \end{aligned}$$

L_g herda a suavidade de $\circ$, e tem inversa $L_{g^{-1}}$, portanto $L_g \in \mathbf{Diff}(\mathcal{G})$.
A mesma construção pode ser repetida para a multiplicação à direita, R_g.

A derivada de L_g na identidade é o mapa:

$$d_e L_g : \mathfrak{g} \to T_{L_g(e)}\mathcal{G} = T_g\mathcal{G}$$

Podemos, a partir disso, construir um campo associado a um dado $x \in \mathfrak{g}$.

Definição: $x_L \in \mathfrak{X}(\mathcal{G}; \mathbb{R})$ é o campo tal que $x_L|_g = d_e L_g(x)$

Definição: Essa associação permite definir a exponencial de um vetor:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\to \mathcal{G} \\ x &\mapsto \exp(x_L)(e) \end{aligned}$$

Vale a relação:

$$\exp(x) \approxeq e^{tx} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\,x)^j}{j!}$$

Teorema (Moskowitz e Sacksteder, 2003) Se $\mathcal{G}$ é conexo então para qualquer $g \in \mathcal{G}$ existem $x, y \in \mathfrak{g}$ tais que $g = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Observação: A aplicação exp é um difeomorfismo entre uma bola centrada em $0 \in \mathfrak{g}$ e a imagem desta bola por exp em $\mathcal{G}$.

2.2 Homomorfismos

Dados grupos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, dizemos que $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um homomorfismo de grupos se

$$\Psi(g \cdot h) = \Psi(g) \cdot \Psi(h) \qquad\qquad \forall\, g,\, h \in \mathcal{G}$$

Definição: Um homomorfismo de grupos de Lie é um homomorfismo de grupos suave.

Seja $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ um homomorfismo de grupos de Lie.
Teorema: $\Psi \circ \exp_{\mathcal{G}} = \ exp_{\mathcal{H}} \circ d_e\Psi$, isto é, o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\exp_G"] \arrow[d, "d_e\Psi"'] & G \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathfrak{h} \arrow[r, "\exp_H"'] & H
\end{tikzcd}$$

Definição: A ação por conjugação de um grupo de Lie $(\mathcal{G}, \cdot)$ é o mapa

$$\begin{aligned} A : \mathcal{G} &\to \mathbf{Diff}(\mathcal{G}) \\ g &\mapsto A_g \end{aligned}$$

onde A_g é a conjugação dada por $A_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$

Proposição: A ação por conjugação é um homomorfismo de grupos de Lie
Prova:

$$\begin{aligned}
A_{g_1 \cdot g_2}(h) &= g_1 \cdot g_2 \cdot h \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} \\
&= g_1 \cdot (g_2 \cdot h \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} \\
&= A_{g_1}(A_{g_2}(h)) = (A_{g_1} \circ A_{g_2})(h) \qquad\qquad \forall\, h \in \mathcal{G} \\
\Longrightarrow \ A_{g_1 \cdot g_2} &= A_{g_1} \circ A_{g_2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall\, g_1,\ g_2 \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

Proposição: A conjugação por $g \in \mathcal{G}$ é um homomorfismo de grupos de Lie
Prova:

$$\begin{aligned}
A_g(h_1 \cdot h_2) &= g \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot g \\
&= g \cdot h_1 \cdot g^{-1} \cdot g \cdot h_2 \cdot g \\
&= A_g(h_1) \cdot A_g(h_2) \qquad\qquad \forall\, h_1,\, h_2 \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

A suavidade de ambas é herdada da suavidade da operação de grupo.

2.3 Ação Adjunta

Definição: A ação adjunta por $g \in \mathcal{G}$ é:

$$Ad_g := \mathrm{d}_e A_g : \mathfrak{g} \to \mathbf{T_{A_g(e)}}\mathcal{G} = \mathfrak{g}$$

Note que usando o teorema sobre homomorfismos para A_g, se tem:

$$\exp_{\mathcal{G}} \circ A_g = Ad_g \circ \exp_{\mathcal{G}}$$

Proposição: A aplicação

$$\begin{aligned} Ad : \mathcal{G} &\to Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad_g \end{aligned}$$

é uma representação de $(\mathcal{G}, \cdot)$ em $\mathfrak{g}$, chamada *representação adjunta.*

Prova: Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} Ad_{g\cdot h} &= \mathrm{d}_e A_{g\cdot h} = \mathrm{d}_e(A_g \circ A_h) \\ &= d_{A_h(e)} A_g \circ d_e A_h \\ &= Ad_g \circ Ad_h \qquad\qquad \forall\, g,\, h \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Definição: A órbita adjunta de um elemento $x \in \mathfrak{g}$ é dada por:

$$O_x := \{Ad_g(x) \mid g \in \mathcal{G}\} \subset \mathfrak{g}$$

Com isto podemos mostrar que, sob certas condições, O_x é uma subvariedade.

2.4 Álgebra de Lie

Definição: Uma *álgebra de Lie* (real) é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) $\mathfrak{g}$ com uma operação bilinear $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo:

- Alternância:

$$[x, x] = 0 \qquad\qquad \forall\, x \in \mathfrak{g}$$

- Identidade de Jacob:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad\qquad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$$

Proposição: No caso real, é completamente equivalente à Alternância:

- Anticomutatividade:

$$[x, y] = -[y, x] \qquad\qquad \forall\, x,\, y \in \mathfrak{g}$$

Prova:

- Alternância $\implies$ Anticomutatividade

$$\begin{aligned}[x+y,x+y] &= [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] \\ &= [x,y]+[y,x]=0 \\ \implies [x,y] &= -[y,x] \qquad\qquad \forall\, x,\, y \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

- Anticomutatividade $\implies$ Alternância

$$\begin{aligned}[x,x] &= -[x,x] \\ \implies [x,x]+[x,x] &= 0 \\ \implies [x,x] &= 0\cdot 2^{-1} = 0 \qquad\qquad \forall\, x \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

Observação: Essa proposição é válida para álgebras de Lie sobre corpos com característica diferente de dois, isto é, nos quais $\exists\; 2^{-1} \iff 2 \neq 0$, como por exemplo $\mathbb{R}$.

Proposição: A versão infinitesimal da representação adjunta,

$$\begin{aligned} ad := d_e Ad : \mathfrak{g} &\to T_{Ad_e}(Aut(\mathfrak{g})) \cong End(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\end{aligned}$$

fornece uma estrutura de álgebra para $\mathfrak{g}$ satisfazendo:

(1) $ad_x(x) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$

(2) $ad_x(y)$ é bilinear em x e y

(3) $ad_{ad_x(y)}(z) = [ad_x, ad_y](z), \forall\; x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$

A condição **(3)** da proposição anterior que fornece uma estrutura de álgebra satisfaz a identidade de Jacobi:

$$ad_x \circ ad_y(z) + ad_z \circ ad_x(y) + ad_y \circ ad_y \circ ad_z(x) = 0.$$

Mais usualmente podemos denotar $ad_x(y) = [x,y]$

Então, de acordo com a proposição, o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido da operação o colchete de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ (e de seus subespaços) $[x,y] \doteq ad_x(y)$ é uma Álgebra de Lie.

Mais ainda, quando consideramos os casos de matrizes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (e seus subgrupos) geralmente temos que $[x,y] = xy - yx$.

Podemos ver que quando o grupo $\mathcal{G}$ é abeliano, o par $(\mathfrak{g}, ad)$ é trivial como álgebra.

Também podemos obter a seguinte relação:

$$g\cdot[x,y]\cdot g^{-1} \cong Ad_g(ad_x(y)) = ad_{Ad_g(x)}(Ad_g(y)).$$

3 Grupos de Matrizes

3.1 Os Grupos $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$

Definição: Denota-se por $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ou *Grupo Linear Geral de Dimensão n*, o conjunto:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad \exists\, A^{-1}\ \}$$

Dotado da operação de multiplicação matricial.
Note que a condição $\exists\, A^{-1}$ é equivalente a $det(A) \neq 0$.

Afirmação: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é um grupo.

Prova:

- Fechamento:

$$\begin{aligned}
&\text{Se } A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\
&\iff \det(A) \neq 0 \quad e \quad \det(B) \neq 0 \\
&\iff \det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0 \\
&\iff AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

- Associatividade:

  Segue da associatividade da multiplicação matricial.

- Identidade:

$$\exists\, I_n^{-1} = I_n \implies I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa:

$$\begin{aligned}
&\text{Se } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \\
&\text{e } \exists\, {A^{-1}}^{-1} = A \implies A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Definição: Denota-se por $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, ou *Grupo Linear Especial (Unimodular) de Dimensão n*, o conjunto:

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad det(A) = 1\ \} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Dotado da operação de multiplicação matricial.

Afirmação: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ é um grupo.

Prova:

- Fechamento:

$$\begin{aligned} &\text{Se } A, B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ &\iff \det(A) = 1 \quad e \quad \det(B) = 1 \\ &\iff \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \\ &\iff AB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

- Associatividade:

  Segue da associatividade da multiplicação matricial.

- Identidade:

$$\det(I_n) = 1 \implies I_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa:

  Se $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$,
  $1 = \det(I_n) = \det\big(AA^{-1}\big) = \det(A) \cdot \det\big(A^{-1}\big) = \det\big(A^{-1}\big) \implies A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Exemplo: Um caso do Grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
Sejam:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 1$$

Se $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ e $A \cdot B = C$, então $C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 29 \\ 19 & 12 \end{pmatrix} = C,$$

$$\det(C) = 46 \cdot 12 - 29 \cdot 19 = 1.$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -29 \\ -19 & 46 \end{pmatrix}, \text{ com } \det\big(C^{-1}\big) = 12 \cdot 46 - (-29) \cdot (-19) = 1.$$

$$\text{Então, } C, C^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

3.2 A Álgebra de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Afirmação: O espaço tangente à identidade de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, dotado da operação de Ação Adjunta, Ad_{GL}, ou a Álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, é isomorfo ao espaço das matrizes $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Prova: Dados a identidade de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e uma curva regular suave γ, tal que $\gamma(0) = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, o vetor tangente a γ em I_n é o funcional:

$$\begin{aligned} v : \mathbf{C}^\infty(\mathrm{GL}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto v(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) \Bigg|_0 \end{aligned}$$

O vetor v pode ser escrito como combinação linear das derivadas parciais da função f, X_i, as quais formam uma base para o espaço em questão:

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \Bigg|_e = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot X_i(f)$$

Por exemplo, um vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ tangente a um ponto p, com $v, p \in \mathbb{R}^3$, pode ser escrito como:

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} \Bigg|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \Bigg|_p + v_3 \frac{\partial}{\partial z} \Bigg|_p$$

Definindo-se a função:

$$\begin{aligned} x_{jk} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto x_{jk}(A) = a_{jk}, \end{aligned}$$

que para cada matriz $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ retorna a sua entrada a_{jk}, pode-se definir uma nova função para o vetor tangente:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ x_{jk} &\mapsto v(x_{jk}) = v_{jk}, \text{ uma matriz.} \end{aligned}$$

Logo, pode-se escrever o vetor tangente na forma:

$$v = \sum_{j,k=1}^{n} v_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} \Bigg|_e = \sum_{j,k=1}^{n} v_{jk} \cdot X_{jk},$$

sendo que as matrizes X_{jk} formam uma base para $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Portanto, sendo $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos v, tem-se que:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

Outra abordagem possível seria definir as curvas que constroem as bases do espaço $T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo: O caso $n = 2$, em que $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
Utilizando-se a função x_{jk} definida anteriormente e definindo-se uma curva $A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se que: $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{jk} \circ A(t) \Big|_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } j,k \neq 1,1 \\ 1, & \text{se } j,k = 1,1 \end{cases}, \text{ ou seja, } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) \Big|_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$$

Analogamente, definindo-se as curvas

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix},$$

é possível construir, também,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Uma vez que E_1, E_2, E_3 e E_4 são bases tanto de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ quanto de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, pode-se concluir que:

$$\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

Intuitivamente, pode-se entender o vetor tangente a uma curva pertencente a um grupo de matrizes, em sua identidade, como uma variação em torno da identidade.

Exemplo:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sofre uma perturbação t na direção a_{12} da matriz a partir da identidade, e a taxa dessa variação é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Afirmação: A Álgebra de Lie de um sub-grupo $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Prova: Como a Álgebra de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, é isomorfa ao espaço das matrizes $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, quando $\mathcal{G}$ é um grupo de matrizes e subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, o espaço tangente à identidade do grupo, $T_e\mathcal{G}$, dotado da operação de Ação Adjunta, Ad_G, ou a Álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, é um subespaço de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3.3 Determinante e Traço - Um Resultado Geral

Lema: Se $\gamma : \mathbb{R} \to M(\mathbb{R}; n)$ é diferenciável e $\gamma(0) = I_n$, então:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)) \bigg|_0 = traço(\gamma'(0))$$

Prova: Sabendo-se que:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \cdot A_{1i} \cdot det(A[1, i]),$$

onde $A[i, j]$ é a matriz A sem a linha i e a coluna j, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)) \bigg|_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \cdot \gamma(t)_{1i} \cdot det(\gamma(t)[1, i]) \bigg|_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \left(\gamma'(0)_{1i} \cdot det(\gamma(0)[1, i]) + \gamma(0)_{1i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)[1, i]) \bigg|_0 \right) \\
&= \gamma'(0)_{11} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)[1, 1]) \bigg|_0
\end{aligned}$$

Repetindo-se o argumento n vezes para calcular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)[1, 1]) \bigg|_0 \text{, tem-se:}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)) \bigg|_0 = \gamma'(0)_{11} + \gamma'(0)_{22} + \cdots + \gamma'(0)_{nn},$$

sendo que, para o caso da matriz $\gamma(t)[n-1, n-1]$, por se tratar de uma matriz 1×1, tem-se:

$$det(\gamma(t)[n-1, n-1]) = \gamma(t)_{nn} \text{ , logo}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)[n-1, n-1]) \bigg|_0 = \gamma'(0)_{nn}$$

Portanto, como

$$\gamma'(0)_{11} + \gamma'(0)_{22} + \cdots + \gamma'(0)_{nn} = traço(\gamma'(0)) \text{, tem-se que}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, det(\gamma(t)) \bigg|_0 = traço(\gamma'(0))$$

Exemplo: O caso das matrizes $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, também pelo método dos co-fatores. Define-se uma matriz:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix},$$

com $\det(A(t)) = a(t) \cdot \det(d(t)) - b(t) \cdot \det(c(t)) = a(t)d(t) - b(t)c(t)$, logo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(A(t)) \bigg|_0 = a'(0)d(0) + a(0)d'(0) - b'(0)c(0) - b(0)c'(0),$$

mas como em $t = 0$, $A(0) = I_n$, tem-se que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(A(t)) \bigg|_0 = a'(0) + d'(0) = \text{traço}(A'(0))$$

3.4 A Álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Afirmação: O espaço tangente à identidade de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $T_e\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou a Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, é o conjunto de todas as matrizes em $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ cujo traço é igual a zero.

Prova: Como $\gamma(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\ \forall\ t$, tem-se que $\det(\gamma(t)) = 1$.

Logo, se $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ é diferenciável com $\gamma(0) = I_n$, tem-se que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(\gamma(t)) \Big|_0 = 0$. Portanto, o traço$(\gamma'(0)) = 0$ e todas as matrizes em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ têm traço zero.

Exemplo: As bases de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Para definir as curvas que constroem as bases do espaço $T_e\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, utiliza-se a função x_{jk} previamente definida e uma curva $A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, tal que:

$$\begin{aligned} \det(A(t)) &= e^t e^{-t} = 1, \text{ logo } A(t) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \text{ e} \\ A(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{jk} \circ A(t) \Big|_0 &= \begin{cases} 0 & \text{se } j,k \neq 1,1 \text{ ou } 2,2 \\ -1 & \text{se } j,k = 1,1 \text{ ou } 2,2 \end{cases}, \text{ ou seja,} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) \Big|_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_1 \end{aligned}$$

Sendo que $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ podem ser construídas através das mesmas curvas apresentadas para o caso $T_e\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Vale observar que os traços de todas as matrizes que formam a base são iguais a zero, como era esperado para uma curva com determinante igual a um.

Além disso, a dimensão de $T_e\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ é igual a três, sendo possível identificá-lo com o $\mathbb{R}^3$, o que será útil posteriormente.

3.5 Ação por Conjugação e Ação Adjunta

Definição: Para qualquer grupo de matrizes $\mathcal{G}$ dotado de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma Ação por Conjugação por multiplicação à esquerda é uma ação do grupo $\mathcal{G}$ sobre ele mesmo, na forma:

$$A_G x := \ G \cdot x \cdot G^{-1},\ \forall\, G, x \in \mathcal{G}$$

Como $\mathcal{G}$ é um grupo, $A_G x$ está contido em $\mathcal{G}$.

Exemplo: Ação por Conjugação para um grupo $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$$A_G(h) = G \cdot h \cdot G^{-1}, \text{ com } G, h \in \mathcal{G},$$

pode ser visto como uma transformação de coordenadas:

$$[A \cdot B \cdot A^{-1}],$$

que transforma os elementos b_{jk} na base $\{e_1 \cdots e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ em elementos na base $\{v_1 \cdots v_n\} \subset \mathbb{R}^n$.

Observação: A_{GL} é uma mudança de base geral e não preserva a orientação. Já A_{SL} preserva a orientação, uma vez que para o grupo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ existe a condição de que o determinante seja unitário.

Definição: A Ação Adjunta é definida como a derivada na identidade do grupo, isto é, se $g \in \mathfrak{g}$, então:

$$Ad_G g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_G(\gamma(t)) \bigg|_0, \text{ sendo } \gamma(t) \text{ um caminho em } \mathcal{G}, \gamma(0) = I, \gamma'(0) = g.$$

$$Ad_G := d(A_G)_I = G \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \gamma(t) G^{-1} \bigg|_0 = G \cdot g \cdot G^{-1}$$

Exemplo: Ação Adjunta no espaço tangente a um grupo $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Como a Ação Adjunta é a derivada na identidade, ela pode ser construída a partir da Ação por Conjugação:
Sejam $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) \Big|_0 = x,\ h(0) = e$, e $G, h \in \mathcal{G}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_G(h(t)) \bigg|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (G \cdot h(t) \cdot G^{-1}) \bigg|_0 = G \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) \bigg|_0 G^{-1} = G \cdot x \cdot G^{-1}$$

Portanto,

$$Ad_G(x) = G \cdot x \cdot G^{-1}, \text{ com } G \in \mathcal{G} \text{ e } x \in \mathfrak{g}$$

3.6 As Órbitas Adjuntas da Álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Definição: O conjunto das imagens de um elemento x de uma Álgebra de Lie de um grupo $\mathcal{G}$, sob ação de todos os operadores Ad_g, é chamado de Órbita Adjunta de x:

$$\mathcal{O}_x := \{Ad_g(x) \quad | \quad g \in \mathcal{G}\}$$

Exemplo: Como determinado anteriormente, a Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$.

As Órbitas Adjuntas em $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ são as componentes conectadas das quádricas:

- $a^2 + bc = \text{constante} \neq 0$
- cada metade do cone $a^2 + bc = 0$
- e a origem $a = b = c = 0$

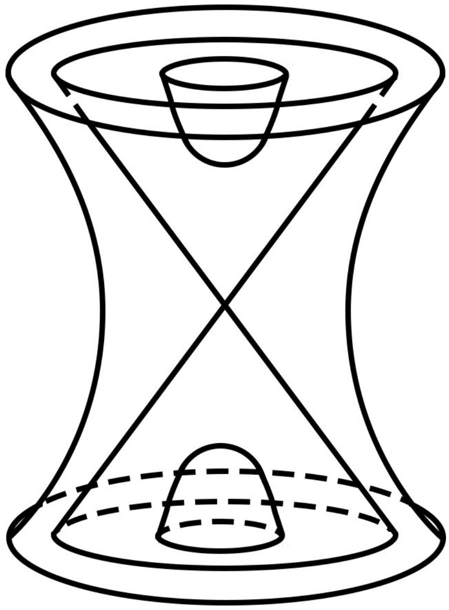

Figura 1: Órbitas Adjuntas em $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

4 Referências

Vladimir I. Arnold, Boris A. Khesin. Topological Methods in Hydrodynamics. Applied Mathematical Sciences; 125. Springer, 1937.

Qizhen He. Lie Algebras and Lie Brackets of Lie Groups - Matrix Groups. University of Chicago VIGRE REU, 2011.